

ΜΑΘΗΜΑ 22

1.8 ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Ορισμός της συνέχειας

Πράξεις με συνεχείς συναρτήσεις

Συνέχεια συνάρτησης σε διάστημα

Θεωρία – Ασκήσεις

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Ορισμός

Συνάρτηση f λέγεται συνεχής σε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, όταν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Γεωμετρική ερμηνεία:: Η C_f συνεχίζεται (δε διακόπτεται) στη θέση x_0 .

2.

Ορισμός

Συνάρτηση f λέγεται συνεχής, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της.

3.

Βασικές συνεχείς συναρτήσεις

Πολυωνυμική, ρητή, ημx, συνx, εφx, σφx, εκθετική, λογαριθμική.

4.

Πράξεις

Πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων δίνουν συνεχή συνάρτηση.

5.

Η σύνθεση συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση.

6.

Θεώρημα Bolzano

Αν συνάρτηση f είναι συνεχής σε κλειστό διάστημα $[a, b]$ και $f(a) \cdot f(b) < 0$, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (a, b)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$

Άλλη έκφραση του συμπεράσματος:

η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο ανοικτό διάστημα (a, b)

Γεωμετρική ερμηνεία του συμπεράσματος:

η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο.

Συμπλήρωση

Αν επί πλέον η συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη στο $[a, b]$, τότε το x_0 είναι μοναδικό.

7.

Δύο άμεσα συμπεράσματα.

- α) Αν συνάρτηση f είναι συνεχής και δε μηδενίζεται σε διάστημα Δ , τότε διατηρεί πρόσημο στο Δ .
- β) Αν τοποθετήσουμε τις ρίζες συνεχούς συνάρτησης στον άξονα $x'x$, τότε η συνάρτηση διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα που ορίζονται.

8.

Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών.

Αν συνάρτηση f είναι συνεχής σε κλειστό διάστημα $[a, b]$ και $f(a) \neq f(b)$, τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(a)$, $f(b)$ υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in (a, b)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = \eta$.

9.

Η εικόνα διαστήματος

Αν συνάρτηση f είναι συνεχής και μη σταθερή σε διάστημα Δ , τότε η εικόνα $f(\Delta)$ είναι διάστημα.

Προσοχή. Η εικόνα κλειστού είναι κλειστό.

Δεν είναι σίγουρο ότι συμβαίνει το ίδιο με ανοικτό.

10.

Θεώρημα μέγιστης – ελάχιστης τιμής.

Αν συνάρτηση f είναι συνεχής σε κλειστό διάστημα $[a, b]$, τότε έχει μέγιστο M και ελάχιστο m .

Άμεσο συμπέρασμα.

α) $f([a, b]) = [m, M]$

β) Αν $m = M$ τότε f σταθερή

11.**Φανταζόμαστε τη γρ. παράσταση**

Αν συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα σε διάστημα $[α, β]$,
τότε $f([α, β]) = [f(α), f(β)]$

Αν συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα σε διάστημα $[α, β]$,
τότε $f([α, β]) = [f(β), f(α)]$

Αν συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα σε διάστημα $(α, β)$,
τότε $f((α, β)) = \left(\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x), \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) \right)$

Αν συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα σε διάστημα $(α, β)$,
τότε $f((α, β)) = \left(\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x), \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) \right)$

12.

Αν συνάρτηση f είναι συνεχής σε διάστημα $(α, β)$ με

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = -\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow \beta} f(x) = +\infty,$$

τότε η f έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(α, β)$

Το ίδιο ισχύει αν τα $-\infty, +\infty$ εναλλάγουν

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1^η ενότητα

1.

Για συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δίνεται ότι $f(x+y) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι :

- i) Αν η f είναι συνεχής στο 0 , τότε είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.
- ii) Αν η f είναι συνεχής σε σημείο a , τότε είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Προτεινόμενη λύση

i)

$$f \text{ συνεχής στο } 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \quad (1)$$

Από την υπόθεση $f(x+y) = f(x) + f(y)$ (2), για $x = y = 0$ έχουμε

$$f(0+0) = f(0) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0$$

$$(1) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \quad (3)$$

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ τυχαίο.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) \stackrel{(2)}{=} \lim_{h \rightarrow 0} [f(x_0) + f(h)] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0) + \lim_{h \rightarrow 0} f(h) \\ &\stackrel{(3)}{=} f(x_0) + 0 = f(x_0) \text{ άρα } f \text{ συνεχής στο τυχαίο } x_0 \end{aligned}$$

ii)

$$f \text{ είναι συνεχής στο } a \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a) \stackrel{(2)}{\Rightarrow}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} [f(a) + f(h)] = f(a)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(a) + \lim_{h \rightarrow 0} f(h) = f(a)$$

$$f(a) + \lim_{h \rightarrow 0} f(h) = f(a)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(h) = 0 = f(0)$$

Άρα f συνεχής στο 0 , οπότε κατά το (i), συνεχής στο $\mathbb{R}$

2.

Για συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$ δίνεται ότι $f(xy) = f(x)f(y)$ για κάθε

$x, y \in \mathbb{R}^*$. Να αποδείξετε ότι :

i) Αν η f είναι συνεχής στο 1, τότε είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^*$.

ii) Αν η f είναι συνεχής σε σημείο $a \in \mathbb{R}^*$, τότε είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^*$.

Προτεινόμενη λύση

i)

$$f \text{ συνεχής στο } 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \quad (1)$$

$$\text{Από την υπόθεση } f(xy) = f(x)f(y) \quad (2)$$

$$\text{Για } x = y = 1 \text{ έχουμε } f(1 \cdot 1) = f(1)f(1) \Rightarrow$$

$$f(1) = 1$$

$$(1) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 \quad (3)$$

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ τυχαίο.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{\frac{x}{x_0} \rightarrow 1} f(x) = \lim_{h \rightarrow 1} f(x_0 h) \quad \left(\text{θέσουμε } \frac{x}{x_0} = h, \text{ οπότε } x = x_0 h \right)$$

$$\stackrel{(2)}{=} \lim_{h \rightarrow 1} [f(x_0)f(h)]$$

$$= \lim_{h \rightarrow 1} f(x_0) \cdot \lim_{h \rightarrow 1} f(h) \stackrel{(3)}{=} f(x_0) \cdot 1 = f(x_0)$$

άρα f συνεχής στο τυχαίο x_0

ii)

$$f \text{ είναι συνεχής στο } a \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

$$\lim_{\frac{x}{a} \rightarrow 1} f(x) = f(a) \quad \left(\text{θέτουμε } \frac{x}{a} = h, \text{ οπότε } x = ah \right)$$

$$\lim_{h \rightarrow 1} f(ah) = f(a)$$

$$\stackrel{(2)}{\Rightarrow} \lim_{h \rightarrow 1} [f(a)f(h)] = f(a)$$

$$\lim_{h \rightarrow 1} f(a) \cdot \lim_{h \rightarrow 1} f(h) = f(a)$$

$$f(a) \cdot \lim_{h \rightarrow 1} f(h) = f(a)$$

$$\lim_{h \rightarrow 1} f(h) = 1 = f(1)$$

Άρα f συνεχής στο 1, οπότε κατά το (i), συνεχής στο $\mathbb{R}^*$

3.

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν

i) f συνεχής στο 0

ii) $f(x+y) + x + y = [f(x) + x][f(y) + y]$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$

iii) $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Να αποδείξετε ότι, η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Υπόδειξη.

$$f(x+y) = [f(x) + x][f(y) + y] - x - y$$

και ακολουθούμε την άσκηση 1.i)

4.

Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο 1 και

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)f(x) + \sin \frac{\pi x}{2}}{(x-1)^2} = 1, \text{ να υπολογίσετε την τιμή } f(1).$$

Προτεινόμενη λύση

$$f \text{ συνεχής στο } 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1).$$

Οπότε, αρκεί να βρούμε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

$$\text{Θέτουμε } g(x) = \frac{(x-1)f(x) + \sin \frac{\pi x}{2}}{(x-1)^2} \text{ κοντά στο } 1.$$

$$\text{Τότε } \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 1 \text{ και } g(x)(x-1)^2 = (x-1)f(x) + \sin \frac{\pi x}{2}$$

$$g(x)(x-1)^2 - \sin \frac{\pi x}{2} = (x-1)f(x)$$

$$f(x) = g(x)(x-1) - \frac{\sin \frac{\pi x}{2}}{x-1} \quad (1)$$

$$\text{Αλλά } \lim_{x \rightarrow 1} [g(x)(x-1)] = \lim_{x \rightarrow 1} g(x) \cdot \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 1 \cdot 0 = 0 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \frac{\pi x}{2}}{x-1} = \lim_{x-1 \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\pi x}{2}}{x-1}. \text{ Θέτουμε } x-1 = u, \text{ οπότε } x = 1+u \text{ και } u \rightarrow 0$$

$$= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\pi(1+u)}{2}}{u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi u}{2} \right)}{u}$$

$$= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{-\eta \mu \frac{\pi u}{2}}{u} = -\frac{\pi}{2} \lim_{\frac{\pi u}{2} \rightarrow 0} \frac{\eta \mu \frac{\pi u}{2}}{\frac{\pi u}{2}} = -\frac{\pi}{2} \cdot 1 = -\frac{\pi}{2}$$

$$\text{Άρα } (1) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0 - \left(-\frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{2}$$

5.

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ ικανοποιεί τη σχέση
 $|xf(x)| \leq |x - \eta\mu x|$.

Αν η f είναι συνεχής στο 0 , να υπολογίσετε την τιμή $f(0)$.

Προτεινόμενη λύση

f συνεχής στο $0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$.

Οπότε, αρκεί να βρούμε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Από την υπόθεση έχουμε $|x|f(x) \leq |x - \eta\mu x|$

Για x κοντά στο 0 $|f(x)| \leq \frac{|x - \eta\mu x|}{|x|}$

$$0 \leq |f(x)| \leq \left| \frac{x - \eta\mu x}{x} \right|$$

$$0 \leq |f(x)| \leq \left| 1 - \frac{\eta\mu x}{x} \right|$$

Αλλά $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$ άρα $\lim_{x \rightarrow 0} \left| 1 - \frac{\eta\mu x}{x} \right| = |1 - 1| = 0$.

Από το κριτήριο παρεμβολής θα έχουμε $\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| = 0$, οπότε και $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

2^η ενότητα

6.

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) \neq f(\beta)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε $5f(\xi) = 2f(\alpha) + 3f(\beta)$.

Προτεινόμενη λύση

Αναζητώ ρίζα της εξίσωσης $5f(x) = 2f(\alpha) + 3f(\beta)$ στο διάστημα (α, β)
 $5f(x) - 2f(\alpha) - 3f(\beta) = 0$

Θεωρώ τη συνάρτηση $g(x) = 5f(x) - 2f(\alpha) - 3f(\beta)$, $x \in [\alpha, \beta]$ που είναι συνεχής
 Οπότε, αναζητώ ρίζα της εξίσωσης $g(x) = 0$

Είναι g συνεχής στο $[\alpha, \beta]$

$$g(\alpha) = 5f(\alpha) - 2f(\alpha) - 3f(\beta) = 3f(\alpha) - 3f(\beta) = 3[f(\alpha) - f(\beta)]$$

$$g(\beta) = 5f(\beta) - 2f(\alpha) - 3f(\beta) = 2f(\beta) - 2f(\alpha) = -2[f(\alpha) - f(\beta)]$$

Άρα $g(\alpha)g(\beta) = -6[f(\alpha) - f(\beta)]^2 < 0$

Κατά το θεώρημα Bolzano, η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα $\xi \in (\alpha, \beta)$

7.

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[0, 2\alpha]$ με $f(0) = f(2\alpha)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [0, \alpha]$ τέτοιος, ώστε $f(\xi) = f(\xi + \alpha)$.

Προτεινόμενη λύση

Αναζητώ ρίζα της εξίσωσης $f(x) = f(x + \alpha)$ στο διάστημα $[0, \alpha]$
 $f(x) - f(x + \alpha) = 0$

Θεωρώ τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - f(x + \alpha)$ στο $[0, \alpha]$ συνεχής σαν διαφορά συνεχών.

Αναζητώ ρίζα της εξίσωσης $g(x) = 0$

Είναι g συνεχής στο $[0, \alpha]$

$$g(0) = f(0) - f(0 + \alpha) = f(0) - f(\alpha)$$

$$g(\alpha) = f(\alpha) - f(\alpha + \alpha) = f(\alpha) - f(2\alpha) = f(\alpha) - f(0)$$

$$\text{Άρα } g(0)g(\alpha) = -[f(\alpha) - f(0)]^2 \leq 0$$

- Όταν $g(0)g(\alpha) = 0$, δηλαδή όταν $g(0) = 0$ ή $g(\alpha) = 0$ η ζητούμενη ρίζα είναι 0 ή α .
- Όταν $g(0)g(\alpha) < 0$, κατά το θεώρημα Bolzano, η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα $\xi \in (0, \alpha)$, άρα $\xi \in [0, \alpha]$

8.

Έστω f, g συναρτήσεις συνεχείς στο διάστημα $[a, b]$ με $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιος, ώστε

$$\frac{f(\xi)}{g(\xi)} = \frac{1}{\xi - a} + \frac{1}{\xi - b}$$

Προτεινόμενη λύση

Αναζητώ ρίζα της εξίσωσης $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b}$ στο διάστημα (a, b)

$$f(x)(x-a)(x-b) = g(x)(x-b) + g(x)(x-a)$$

$$f(x)(x-a)(x-b) - g(x)(x-b) - g(x)(x-a) = 0$$

Έστω η συνάρτηση $h(x) = f(x)(x-a)(x-b) - g(x)(x-b) - g(x)(x-a)$, $x \in [a, b]$ συνεχής αφού προκύπτει από πράξεις συνεχών.

Αναζητώ ρίζα της εξίσωσης $h(x) = 0$

Είναι h συνεχής στο $[a, b]$

$$h(a) = -g(a)(a-b) = g(a)(b-a)$$

$$h(b) = -g(b)(b-a)$$

$$\text{Άρα } h(a)h(b) = -g(a)g(b)(b-a)^2$$

Όμως τα $g(a)$ και $g(b)$ είναι ομόσημα διότι αν ήταν ετερόσημα τότε στο $[a, b]$ για την g συνάρτηση θα ίσχυε το θεώρημα Bolzano άρα θα υπήρχε $\eta \in (a, b)$ ώστε $g(\eta) = 0$ που είναι άτοπο δεδομένου ότι $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [a, b]$ άρα

$$h(a)h(b) < 0 \text{ οπότε}$$

Κατά το θεώρημα Bolzano, η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα $\xi \in (a, b)$

9.

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[α, β]$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $ξ ∈ (α, β)$ τέτοιος, ώστε $f(ξ) = \frac{1}{α-ξ} + \frac{1}{β-ξ}$

Υπόδειξη.

Ακολουθήστε την άσκηση 8

10.

Έστω f, g συναρτήσεις συνεχείς στο διάστημα $[α, β]$ και με τιμές στο $[α, β]$.

Αν $g(α) = β$ και $g(β) = α$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $ξ ∈ [α, β]$ τέτοιο, ώστε $f(g(ξ)) = g(ξ)$.

Προτεινόμενη λύση

Από υπόθεση είναι $α ≤ f(x) ≤ β$ και $α ≤ g(x) ≤ β$ **(1)** για κάθε $x ∈ [α, β]$

Αναζητώ ρίζα της εξίσωσης $f(g(x)) = g(x)$ στο διάστημα $[α, β]$
 $f(g(x)) - g(x) = 0$

Έστω η συνάρτηση $h(x) = f(g(x)) - g(x)$, $x ∈ [α, β]$ συνεχής σαν διαφορά συνεχών.
 Αναζητώ ρίζα της εξίσωσης $h(x) = 0$

Είναι h συνεχής στο $[α, β]$

$$h(α) = f(g(α)) - g(α) = f(β) - β \stackrel{(1)}{\leq} 0$$

$$h(β) = f(g(β)) - g(β) = f(α) - α \stackrel{(1)}{\geq} 0$$

Άρα $h(α)h(β) ≤ 0$

- Όταν $h(α)h(β) = 0$, δηλαδή όταν $h(α) = 0$ ή $h(β) = 0$, ο ζητούμενος $ξ$ είναι το $α$ ή το $β$ αντίστοιχα
- Όταν $h(α)h(β) < 0$, κατά το θεώρημα Bolzano, η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα $ξ ∈ (α, β)$, άρα και $ξ ∈ [α, β]$.

11.

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$ και έχουν την ίδια μέγιστη τιμή σε διαφορετικά σημεία, να αποδείξετε ότι οι C_f, C_g έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

Προτεινόμενη λύση

Έστω $M = f(x_1) = g(x_2)$ η ίδια μέγιστη τιμή, όπου $x_1 \neq x_2$ (ας είναι $x_1 < x_2$)

Οπότε θα είναι $f(x) \leq M$ και $g(x) \leq M$ για κάθε x **(1)**

Αναζητάμε ρίζα της εξίσωσης $f(x) = g(x)$

$$f(x) - g(x) = 0$$

Έστω η συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x)$ συνεχής σαν διαφορά συνεχών.

Αναζητάμε ρίζα της εξίσωσης $h(x) = 0$

$$h(x_1) = f(x_1) - g(x_1) = M - g(x_1) \stackrel{(1)}{\geq} 0$$

$$h(x_2) = f(x_2) - g(x_2) = f(x_2) - M \stackrel{(1)}{\leq} 0$$

Άρα $h(x_1)h(x_2) \leq 0$

- Όταν $h(x_1)h(x_2) = 0$, δηλαδή όταν $h(x_1) = 0$ ή $h(x_2) = 0$, τότε η ζητούμενη ρίζα της εξίσωσης $h(x) = 0$ είναι x_1 ή x_2 αντίστοιχα.
- Όταν $h(x_1)h(x_2) < 0$, κατά το θεώρημα Bolzano, η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα ξ μεταξύ των x_1, x_2

12.

Αν $\beta > 0$ και $\alpha + \beta < -1$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3 + \alpha x^2 + \beta = 0$ έχει τρεις πραγματικές ρίζες.

Προτεινόμενη λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta$, $x \in \mathbb{R}$ που είναι συνεχής.

Αναζητάμε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$

$$\text{Είναι } f(0) = 0^3 + \alpha 0^2 + \beta = \beta > 0$$

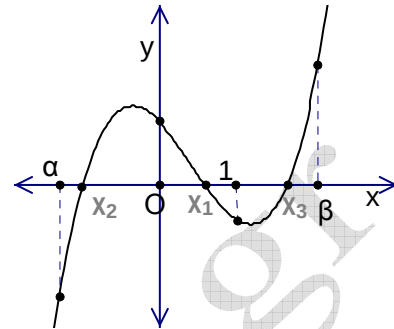
$$f(1) = 1^3 + \alpha 1^2 + \beta = 1 + \alpha + \beta < 0, \\ \text{αφού } \alpha + \beta < -1$$

$$\text{Άρα } f(0) \cdot f(1) < 0$$

Κατά το θεώρημα Bolzano,

η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα x_1

στο διάστημα $(0, 1)$.



$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + \alpha x^2 + \beta) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + \alpha x^2 + \beta) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

Και επειδή f συνεχής, το σύνολο τιμών της είναι το $(-\infty, +\infty)$

Άρα υπάρχει $\kappa < 0$, ώστε να είναι $f(\kappa) < 0$

και $\lambda > 1$, ώστε να είναι $f(\lambda) > 0$

$f(\kappa) \cdot f(0) < 0 \Rightarrow$ υπάρχει ρίζα x_2 της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο διάστημα $(\kappa, 0)$

$f(1) \cdot f(\lambda) < 0 \Rightarrow$ υπάρχει ρίζα x_3 της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο διάστημα $(1, \lambda)$

Η εξίσωση δε μπορεί να έχει και τέταρτη ρίζα, αφού είναι 3^{ου} βαθμού.

13.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και περιττή στο $\mathbb{R}$ με $f(1) > 0$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(\eta\mu x) = 1 - x$ έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

Προτεινόμενη λύση

Αναζητάμε ρίζα της εξίσωσης $f(\eta\mu x) - 1 + x = 0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(\eta\mu x) - 1 + x$, $x \in \mathbb{R}$.

Οπότε, αναζητάμε μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $g(x) = 0$

Η g είναι συνεχής αφού προκύπτει από σύνθεση συνεχών και πράξεις συνεχών.

$$g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\eta\mu\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) - 1 - \frac{\pi}{2} = f(-1) - 1 - \frac{\pi}{2} = -f(1) - 1 - \frac{\pi}{2} < 0$$

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\eta\mu\frac{\pi}{2}\right) - 1 + \frac{\pi}{2} = f(1) - 1 + \frac{\pi}{2} = f(1) + \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) > 0 + 0$$

$$\text{Άρα } g\left(-\frac{\pi}{2}\right) g\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$$

Κατά το θεώρημα Bolzano, η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα

στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

14.

Μια αρκετά δύσκολη άσκηση.

Οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$. Αν η εξίσωση $f(x) = g(x)$ είναι αδύνατη, να αποδείξετε ότι

και η εξίσωση $f(f(x)) = g(g(x))$ είναι αδύνατη.

Προτεινόμενη λύση

$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) \Rightarrow f(g(x)) = g(f(x)) \text{ στο } \mathbb{R} \quad (1)$$

$$f(x) = g(x) \text{ αδύνατη} \Rightarrow f(x) \neq g(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (2)$$

$$\text{Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση } h(x) = f(x) - g(x), x \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

$$\text{Οπότε η εξίσωση } h(x) = 0 \text{ είναι αδύνατη.} \quad (4)$$

Με την απαγωγή σε άτοπο :

Έστω ότι η εξίσωση $f(f(x)) = g(g(x))$ έχει ρίζα x_0

$$\text{Οπότε} \quad f(f(x_0)) = g(g(x_0)) \quad (5)$$

$$(2) \Rightarrow f(x_0) \neq g(x_0)$$

Ας είναι $f(x_0) < g(x_0)$ οπότε ορίζεται το διάστημα $[f(x_0), g(x_0)]$, στο οποίο εφαρμόζουμε το θεώρημα Bolzano για τη συνάρτηση h .

$$h(f(x_0)) \stackrel{(3)}{=} f(f(x_0)) - g(f(x_0)) \stackrel{(1)}{=} f(f(x_0)) - f(g(x_0))$$

$$h(g(x_0)) \stackrel{(3)}{=} f(g(x_0)) - g(g(x_0)) \stackrel{(5)}{=} f(g(x_0)) - f(f(x_0))$$

$$\text{Γινόμενο : } h(f(x_0)) \cdot h(g(x_0)) = -[f(f(x_0)) - f(g(x_0))]^2 < 0$$

Άρα, κατά το θεώρημα Bolzano, η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα, που είναι άτοπο, από την (4)

15.

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$ και $x_1, x_2, \dots, x_v \in [a, \beta]$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [a, \beta]$ τέτοιο, ώστε

$$f(\xi) = \frac{1}{v} [f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_v)]$$

Προτεινόμενη λύση

Επειδή η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, \beta]$, θα έχει ελάχιστο

$m = f(x_0)$ και μέγιστο $M = f(x'_0)$, όπου $x_0, x'_0 \in [a, \beta]$

Άρα θα είναι $m \leq f(x_1) \leq M$

$$m \leq f(x_2) \leq M$$

•

•

•

$$m \leq f(x_v) \leq M$$

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε $v m \leq f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_v) \leq v M$

$$m \leq \frac{1}{v} [f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_v)] \leq M$$

Κατά το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών, θα υπάρχει ξ μεταξύ των x_0, x'_0 , άρα και

μεταξύ των a, β τέτοιο, ώστε $f(\xi) = \frac{1}{v} [f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_v)]$

16.

Να αποδείξετε : Αν συνάρτηση f είναι συνεχής και “1 – 1” σε διάστημα Δ , τότε είναι γνησίως μονότονη στο Δ .

Προτεινόμενη λύση

Έστω ότι η f δεν είναι γνησίως μονότονη στο Δ .

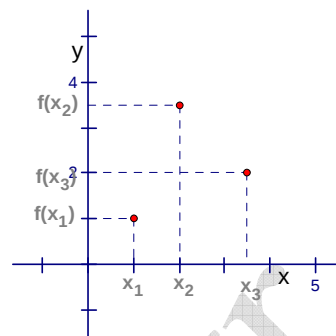
Τότε θα υπάρχουν $x_1, x_2, x_3 \in \Delta$ με $x_1 < x_2 < x_3$ τέτοια, ώστε $f(x_1) < f(x_2)$ και $f(x_2) > f(x_3)$

- Όταν $f(x_3)$ είναι μεταξύ των $f(x_1)$ και $f(x_2)$

Τότε $f(x_3) \in$ στο σύνολο τιμών $f((x_1, x_2))$.

Οπότε, κατά το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$, ώστε να είναι

$f(\xi) = f(x_3)$, που είναι άτοπο, αφού η f είναι “1 – 1”



- Όταν $f(x_3) < f(x_1)$

Τότε $f(x_1) \in$ στο σύνολο τιμών $f((x_2, x_3))$.

Οπότε, κατά το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών, υπάρχει $\xi \in (x_2, x_3)$, ώστε να είναι

$f(\xi) = f(x_1)$, που είναι άτοπο, αφού η f είναι “1 – 1”

